

**Решения заданий муниципального этапа
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2025-2026 учебный год, 10 класс**

10.1. Дано натуральное число n . Его умножили на число m , полученное из n перестановкой цифр. Могло ли при этом получиться число 2025027?

Ответ: нет, не может

Решение:

Заметим, что число 2025027 делится на 27, но не делится на 81. Разберём два случая.

1) Число n делится на 9. Значит, сумма цифр числа n делится на 9. Тогда и m делится на 9, так как сумма цифр числа m совпадает с суммой цифр числа n : эти числа отличаются лишь перестановкой цифр, а сами цифры—одни и те же. В этом случае произведение mn должно делиться на 81, а оно на 81 не делится.

2) Число n не делится на 9. Значит, сумма цифр числа n не делится на 9. Тогда и m не делится на 9, так как сумма цифр числа m совпадает с суммой цифр числа n . В этом случае произведение mn делится не более чем на вторую степень тройки, а оно делится на 27.

В каждом из случаев пришли к противоречию, значит, число 2025027 получиться не могло.

Критерии оценки: Отмечено, что при перестановке цифр числа не меняется остаток от деления на 9 или на 3, дальнейшее продвижение отсутствует – 1 балл.

10.2. Известно, что x , y и z – целые числа и $xy + yz + zx = 2025$. Докажите, что число $(2025 + x^2)(2025 + y^2)(2025 + z^2)$ является квадратом натурального числа.

Доказательство:

$2025 + x^2 = xy + yz + zx + x^2 = (x + y)(x + z)$. Аналогично, $2025 + y^2 = (x + y)(y + z)$ и $2025 + z^2 = (x + z)(y + z)$.

Таким образом, $(2025 + x^2)(2025 + y^2)(2025 + z^2) = ((x + y)(y + z)(x + z))^2$. Кроме того, $(2025 + x^2)(2025 + y^2)(2025 + z^2) > 0$, то есть является квадратом натурального числа.

Критерии оценки:

1. Получено одно из разложений на множители – 1 балл.

2. Представлено выражение в виде квадрата произведения, но не акцентировано внимание, что выражение не может быть равным нулю – 6 баллов.

10.3. Докажите, что все три графика функций $y = ax^2 + 2025x + 2026$, $y = 2025x^2 + ax + 2026$ и $y = 2026x^2 + 2025x + a$, где $a \neq 2025$ и $a \neq 2026$ пересекаются в одной точке.

Доказательство:

При $x = 1$ значения функций в точках равны $y = a + 4051$. Таким образом точка $(1; a + 4051)$ – общая точка графиков. Для первого и второго графика имеется ещё одна точка пересечения $(0; 2026)$, но третий график не проходит через эту точку.

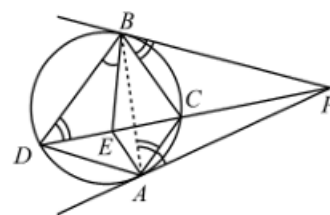
Критерии оценки:

Найдена общая точка, но не отмечено, что такая точка единственная – 5 баллов.

10.4. Из точки P , лежащей вне окружности проведены касательные PA и PB и секущая, которая пересекает окружность в точках C и D , считая от точки P . На хорде CD выбрана точка E так, что углы $\angle DBE$ и $\angle CAP$ равны. Докажите, что точки A, P, B, E лежат на одной окружности.

Доказательство:

Угол $\angle PBC$ – угол между касательной BP и хордой BC равен половине дуги BC . Углы $\angle BDC$ и $\angle BAC$ тоже равны половине дуги BC , как вписанные. Итак, углы $\angle PBC$, $\angle BDC$ и $\angle BAC$ равны между собой. Угол $\angle BEP$ равен сумме углов $\angle BDC$ и $\angle DBE$, как смежный угол к $\angle BED$. Угол $\angle BAP$ равен сумме углов $\angle CAP$ и $\angle BAC$. Значит, углы $\angle BEP$ и $\angle BAP$ равны. Точки A, P, B, E лежат на одной окружности, поскольку отрезок BP виден из точек E и A под одним и тем же углом.



Критерии оценки: Общие критерии в зависимости от продвижения.

10.5. В гандболе за победу дают 2 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. 14 гандбольных команд провели турнир, где каждая команда с каждой сыграла по одному разу. Оказалось, что никакие две команды не набрали

поровну очков. Могло ли случиться, что каждая из команд, занявших первые три места, проиграла каждой из команд, занявших последние три места?

Ответ: нет, не может

Решение:

Предположим, что каждая из команд, занявших первые три места, проиграла каждой из команд, занявших последние три места. Тогда, покажем, что лучшая из трех последних команд набрала не меньше 9 очков. В самом деле, три последних команды в играх между собой разыграли 6 очков, да ещё 18 очков отобрали у трех первых. Поэтому вместе они набрали не меньше 24 очков, и если каждая из них набрала не больше 8 очков, то все три набрали ровно по 8 очков, что противоречит условию задачи. Аналогичным рассмотрением очков, потерянных первыми тремя командами, доказывается, что худшая из трех первых команд потеряла не меньше 9 очков, то есть набрала не больше $26 - 9 = 17$ очков. Получается, что каждая из восьми команд, занявших места с 11-го по 4-ое, набрала не меньше 10 и не больше 16 очков. Но в этом промежутке только 7 целых чисел, и выходит, что какие-то две команды набрали поровну очков. Противоречие.

Критерии оценки:

1. Ответ без пояснений – 0 баллов.
2. Есть оценка для лучшей из трёх последних или худшей из трёх первых – 2 балла.